НИИ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 621.384.6 + 533.9.01 + 517.97 + 531.314

Бородич Андрей Игоревич

АЛГЕБРЫ ЛИ И МЕТОД МОМЕНТОВ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ФОКУСИРОВКИ ИНТЕНСИВНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск 1997

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте ядерных проблем Белорусского государственного университета.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук Хрущинский А.А. (НИИ ЯП)
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Феранчук И.Д. (к.т.ф. БГУ),
	доктор физико-математических наук Синицын А.К. (к.п.м. БГУИР)
Оппонирующая организация:	Институт физики АН РБ

Защита состоится "19" сентября 1997 г. в 10 часов 00 мин. на заседании совета К 02. 01. 01 по защите диссертаций при Белорусском государственном университете (220080, г.Минск, проспект Ф.Скорины, 4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "7" августа 1997 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук Лобко А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. *Интенсивные (сильноточные) релятивистские пучки заряженных частиц* обладают огромной импульсной мощностью и значительной энергией, используются для решения большого числа различных фундаментальных физических, прикладных физических, научно-технических задач. Поэтому изучение динамических свойств данных физических систем вызывает несомненный научный интерес.

Сильноточный релятивистский электронный пучок (СРЭП) или интенсивный релятивистский ионный пучок (ИРИП) представляют собой *нестационарную полностью ионизированную неоднородную однокомпонентную плазму.* Заряженные частицы взаимодействуют как с внешним полем, так и друг с другом. Для теоретического описания нестационарной бесстолкновительной заряженной плазмы, как правило, используют линеаризованные уравнение Власова и уравнения Максвелла. Их решения находят приближенными аналитическими и численными методами.

Однако для интенсивных пучков заряженных частиц в реальных транспортирующих каналах (ТК) выбор малого параметра и линеаризация уравнений самосогласованного поля часто оказываются невозможными. Поэтому для нахождения изменяющегося нестационарного распределения частиц и вычисления макроскопических динамических параметров СРЭП (ИРИП) необходимо использовать расчетно-аналитические методы в рамках непертурбативных подходов.

Цель работы. Основная цель работы – разработка расчетно-аналитической схемы решения нестационарных задач транспортировки СРЭП (ИРИП) в магнитофокусирующих каналах с учетом нелинейностей пространственного заряда и внешних полей в рамках непертурбативных подходов. В качестве конечного продукта вычисляются основные динамические параметры фокусируемого пучка: изменяющиеся среднеквадратичные поперечные размеры, поперечный среднеквадратичный эмиттанс и яркость, параметры центроиды, а также средняя частота и разброс по частотам обращения частиц в магнитном поле, средняя кинетическая энергия их направленного движения и энергетический разброс. Они измеряются на эксперименте и представляют интерес при практическом применении СРЭП (ИРИП).

Научная новизна полученных результатов. 1) Разработан новый операторный алгебраический метод решения нестационарных уравнений самосогласованного поля и расчета динамических параметров СРЭП (ИРИП) в магнитофокусирующих полях. Он применен для решения разного типа нестационарных задач физики пучков заряженных частиц, в том числе – транспортировка СРЭП (ИРИП) в магнитостатических каналах типа МПФС (ТК из соленоидов и дрейфовых промежутков) и ФОДО (ТК из квадруполей и дрейфовых промежутков). Основные достоинства разработанного метода: (A) является непертурбативным расчетно-аналитическим методом и позволяет решать широкий класс нестационарных задач фокусировки СРЭП в реальных каналах транспортировки (в отличие от известных методов для нестационарных задач, использующих малый параметр); (B) получаемые данным методом результаты по точности близки к выходным данным компьютерного моделирования с применением крупных частиц (МКЧ) (в отличие от расчетно-аналитических методов, использующих стационарные или модельные распределения); (C) выигрыш в скорости вычислений, экономия ресурсов ЭВМ (в сравнении с решением уравнений движения и уравнений поля с использованием крупных частиц); (D) возможность задавать разные начальные распределения и выбирать произвольную конфигурацию магнитных полей для анализа динамики фокусируемых СРЭП (ИРИП); (E) теоретико-групповая концепция позволяет использовать единый аппарат для анализа как линейного, так и нелинейного поведения системы. 2) Впервые получена замкнутая система уравнений моментов для двумерного движения гауссовского СРЭП, фокусируемого магнитными мультиполями, при наличии малых кубических нелинейностей внешних полей и пространственного заряда. Она использована для вычисления изменяющихся динамических параметров гауссовского СРЭП при его фокусировке квадрупольными линзами с краевыми полями. 3) Сформулирована и решена нелинейная терминальная задача Майера оптимального управления параметрами магнитофокусирующей системы с квадрупольной и октупольной симметрией, чтобы получить на выходе ТК гауссовский СРЭП с минимально возможным поперечным среднеквадратичным эмиттансом. Впервые задача оптимального управления для минимизации эмиттанса СРЭП решена с учетом кубических нелинейностей фокусирующих полей и пространственного заряда. Впервые показано, что для гауссовского СРЭП с нелинейным полем пространственного заряда рост его поперечного эмиттанса возможно частично скомпенсировать соответствующим выбором краевых полей набора магнитных квадрупольных линз с одинаковыми геометрическими параметрами, но разными значениями градиента.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в многочисленных фундаментальных физических, прикладных физических, научно-технических работах, связанных с применением СРЭП (ИРИП). В том числе: для проведения численных экспериментов по анализу динамики интенсивных релятивистских пучков заряженных частиц в магнитных полях произвольной конфигурации; при расчете каналов транспортировки сильноточных ускорителей; для проектирования ЛСЭ–генераторов с высокими коэффициентом усиления и электронным КПД; при разработке приборов большой колебательной мощности с высоким КПД для генерации электромагнитного излучения от СВЧ колебаний до рентгеновского диапазона; для проектирования установок значительной мощности применительно к электронной сварке и размерной обработке материалов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Разработка операторного алгебраического метода решения нестационарных уравнений самосогласованного поля и расчета динамических параметров СРЭП (ИРИП) в магнитофокусирующих полях.
2. Разработка алгоритма и решение нестационарных задач фокусировки СРЭП (ИРИП) в магнитостатических каналах типа МПФС и ФОДО с использованием операторного алгебраического метода.
3. Получение дисперсионного соотношения для колебаний огибающей СРЭП в продольном магнитном поле.
4. Получение замкнутой системы уравнений моментов для двумерного движения гауссовского СРЭП, фокусируемого магнитными мультиполями, при наличии малых кубических нелинейностей внешних полей и пространственного заряда.
5. Постановка и решение задачи Майера оптимального управления для минимизации поперечного среднеквадратичного эмиттанса СРЭП с учетом нелинейностей фокусирующих полей и пространственного заряда.
6. Вывод о возможности частично уменьшить рост поперечного среднеквадратичного эмиттанса гауссовского СРЭП, используя набор магнитных квадруполей с краевыми полями.

Личный вклад соискателя. Теоретические результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно. Научный руководитель, кандидат физ.-мат. наук Хрущинский А.А. (НИИ ЯП БГУ), принимал участие в постановке задач и обсуждении результатов. Численное решение нелинейной терминальной задачи Майера оптимального управления выполнено совместно с кандидатом физ.-мат. наук Волковым И.А. (Институт математики АН РБ).

Апробация результатов диссертации. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на 4-х международных конференциях: "Физика и техника плазмы" (Минск, 1994 г.), "Неравновесные процессы " (Минск, 1994 г.), "Cooperative Phenomena In Many-Electron Systems" (Trieste, 1994), “Particle Accelerator Conference And International Conference On High-Energy Accelerators” (Dallas, 1995).

Опубликованность результатов. По материалам диссертации опубликовано 9 печатных работ (5 статей в научных журналах, 1 препринт, 2 тезисы докладов на международных конференциях, 1 заключительный отчет о НИР).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, 5-ти глав, выводов, 2-х приложений, списка используемых источников. Материал диссертации изложен на 126 страницах машинописного текста и включает в себя 11 рисунков, 3 таблицы, библиографию из 147 наименований, 2 приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 "Современное состояние проблемы" представлен обзор литературы по теме диссертации.

В §1.1 дается определение СРЭП (ИРИП), приводятся их характеристики, обсуждаются стационарная и нестационарная задачи их фокусировки и транспортировки в магнитостатических каналах, указываются их основные вычисляемые динамические параметры.

В §1.2 рассматриваются *кинетический* и *гидродинамический* подходы теоретического описания динамики СРЭП (ИРИП) во внешних электромагнитных полях. Отмечается, что в реальных установках часто приходится иметь дело с пучками, не согласованными со входом фокусирующей системы. Это значит, что распределение частиц в поперечном 4D фазовом пространстве оказывается нестационарным. В процессе транспортировки СРЭП (ИРИП) нелинейности фокусирующего поля и поля пространственного заряда увеличивают степень его рассогласования с ТК (*Капчинский И.М. Теория линейных резонансных ускорителей. М., Энергоиздат, 1982.- 240 с.*). С другой стороны, наличие границы определяет область локализации СРЭП (ИРИП) в пространстве, и распределение взаимодействующих частиц становится существенно неоднородным (*Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. М., Мир, 1978.- 215 с.*). Эти два обстоятельства приводят к тому, что выбор малого параметра и линеаризация уравнений самосогласованного поля часто оказываются невозможными. Поэтому для нахождения изменяющегося нестационарного распределения частиц и вычисления макроскопических динамических параметров СРЭП (ИРИП) необходимо использовать аналитико-расчетные методы в рамках непертурбативных подходов. В числе основных можно выделить: динамическое описание гамильтоновой системы посредством *симплектических операторов преобразования* и использование динамических уравнений для *моментов функции распределения* статистической системы.

В §1.3 обсуждаются два способа описания динамики произвольного пучка заряженных частиц во внешних полях в рамках гамильтонова формализма: 1) с помощью *операторов преобразования* на симплектическом многообразии, реализующих представление группы Ли (использование *канонических преобразований*), 2) с помощью *гамильтоновых полей* на симплектическом многообразии, реализующих представление алгебры Ли (использование *уравнений движения*). Отмечается, что методика А.Дж.Драгта и др. (*Dragt A.J., Forest E. Computation of Nonlinear Behavior of Hamiltonian Systems Using Lie Algebraic Methods. // Journal Of Mathematical Physics. 1983. Vol.24. P.2734-2744*), основанная на алгебраическом анализе гамильтоновой системы, позволяет находить с заданной точностью единым образом *операторы преобразования* ее координат и импульсов, оперируя с *уравнениями движения* ограниченного числа полиномов.

В §1.4 обсуждается применение формализма моментов функции распределения для вычисления макроскопических параметров СРЭП (ИРИП) безотносительно к виду изменяющегося распределения, когда физическая система обладает определенными свойствами симметрии. В общем случае произвольных полей метод моментов приводит к бесконечной цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих между собой моменты разных порядков. Если поля оказываются линейными, цепочку уравнений моментов можно замкнуть, используя инвариантные функции движения (*Sacherer F.J. RMS Envelope Equations with Space Charge. // IEEE. 1971. NS-18. P.1105-1107*), представляющие собой комбинации моментов 2-ого порядка, – среднеквадратичные эмиттансы ε_x и ε_y или функция I_2. В случае малых нелинейностей оказывается возможным приближенное вычисление изменяющихся средних и среднеквадратичных размеров пучка (*Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. Влияние пространственного заряда и нелинейности на изменение среднеквадратичных размеров пучка заряженных частиц. - Препринт ОИЯИ Р9-11337. - Дубна, 1978. - 22 с.*) с использованием метода усреднения.

В §1.5 обсуждается проблема получения СРЭП (ИРИП) с минимальным поперечным среднеквадратичным эмиттансом. Рассматриваются аналитически посчитанные эффекты, связанные с ростом эмиттанса СРЭП (ИРИП) по причине нелинейностей полей, приводятся основные механизмы развития данного физического явления, когда столкновениями частиц можно пренебречь (*Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. М., Мир, 1980.- 438 с.*). Отмечается, что возможно частично уменьшить возрастание эмиттанса СРЭП (ИРИП), не связанное с изменением его энтропии, используя искусственно создаваемые нелинейности ускоряющих и фокусирующих полей (*Gao J. Nonlinear Repairing In Phase Space. Emittance Recovering Techniques. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1991. A304. P.353-356*).

В §1.6 обсуждаются вопросы оптимизации и управления динамическими параметрами пучка заряженных частиц при его ускорении и транспортировке в заданных электромагнитных полях. Отмечается, что задача минимизации поперечного среднеквадратичного эмиттанса СРЭП (ИРИП) в математическом отношении является задачей Майера теории оптимального управления, которая формулируется для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику управляемого объекта, с целью нахождения минимума заданного функционала.

В главе 2 "Аппарат алгебры Ли в оптике пучков заряженных частиц и стационарных задачах фокусировки СРЭП и ИРИП" критически излагается алгебраическая методика А.Дж.Драгта и др. вычисления оператора преобразования для произвольной гамильтоновой системы. Назначение этой главы – показать, что

1. Если для исследуемой системы известен явный вид гамильтониана, и оказывается возможным представить его с достаточной степенью точности как сумму полиномов по фазовым переменным, тогда структуру оператора преобразования целесообразно определять согласно теореме факторизации Драгта–Финна (*Dragt A.J., Finn J.M. Lie Series and Invariant Functions for Analytic Symplectic Maps. // Journal Of Mathematical Physics. 1976. Vol.17. P.2215-2227*), используя *аппарат алгебры Ли*.

2. В силу того, что действие каждого отдельного элемента ТК любой сложности описывается операторным способом, а операторы для разных элементов могут быть объединены в единый оператор комбинированной системы, использование аппарата алгебры Ли оказывается весьма эффективным в задачах *оптики пучков заряженных частиц*. Он дает выигрыш в скорости вычислений, преимущество в точности расчета аберрационных эффектов, наглядность при интерпретации получаемых результатов в сравнении с концепцией крупных частиц и аналитико-расчетными методами канонической теории аберраций.

3. Область применения алгебраического метода Драгта–Райна (*Ryne R.D., Dragt A.J. Lie Algebraic Treatment of Space Charge. // Proceedings Of The 1987 IEEE PAC. N.-Y.,- 1987. - P.1063-1065*) самосогласованного вычисления оператора преобразования и изменяющейся функции распределения для расчета динамических параметров *пучка заряженных частиц с пространственным зарядом* в фокусирующих полях ограничивается стационарными распределениями. Использование его для решения нестационарных задач транспортировки СРЭП (ИРИП) может приводить к ошибкам.

В главе 3 "Решение нестационарных задач фокусировки интенсивных релятивистских пучков заряженных частиц (аппарат алгебры Ли)" разработан операторный

алгебраический метод решения нестационарных уравнений самосогласованного поля и расчета динамических параметров СРЭП (ИРИП) в магнитофокусирующих полях. Используется одночастичный гамильтониан H для вычисления оператора преобразования М фазовых переменных $\{\mathbf{r},\mathbf{P}\}$ произвольной частицы пучка. Макроскопические динамические параметры СРЭП (ИРИП) определяются с помощью одночастичной функции распределения $g(\mathbf{r},\mathbf{p};z)$. Пучок считается непрерывным. Для выбранных временных и пространственных масштабов взаимодействие носит коллективный характер, заряженная плазма считается бесстолкновительной. Описание динамики СРЭП (ИРИП) выполняется в 6D фазовом пространстве $\xi(x,y,t,P_x,P_y,P_t)$, но вычисление изменения его произвольной начальной функции распределения проводится в поперечном 4D фазовом пространстве $\varsigma(x,y,P_x,P_y)$.

В §3.1 рассматривается вычисление М на основе H. Получено представление H в виде суммы полиномов по фазовым переменным как результат серии канонических преобразований и разложения Тейлора вблизи опорной траектории. Структура М определяется согласно теореме факторизации Драгта–Финна с точностью до нелинейностей 3-ей степени:

$$\mathrm{M} = \exp(:f_4:)\ \exp(:f_3:)\ M,$$

где $:f_m:$ – операторы Ли, ассоциированные с однородными полиномами m- ой степени, M – матричное представление оператора $\exp(:f_2:)$. Динамические уравнения для факторов М имеют вид:

$$\dot{M} = JSM,\ \dot{f}_3 = -H_3^{\text{int}},\ \dot{f}_4 = -H_4^{\text{int}} + \frac{1}{2}:f_3:(-H_3^{\text{int}});$$

$$M(\xi^{in}) = I,\ f_3(\xi^{in}) = 0,\ f_4(\xi^{in}) = 0.$$

Здесь I и J – единичные симметричная и кососимметричная матрицы размера 6×6. Матрицы $S(z), T(z), L(z)$ и полиномы H_3^{int} и H_4^{int} определяются выражениями

$$H_2(\xi,z) = \frac{1}{2}S_{ij}(z)\xi_i\xi_j,\quad H_3(\xi,z) = T_{ijk}(z)\xi_i\xi_j\xi_k,\quad H_4(\xi,z) = L_{ijkl}(z)\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l,$$

$$H_3^{\text{int}}(\xi,z) = H_3(M\xi,z) = T_{ijk}(z)M_{ia}M_{jb}M_{kc}\xi_a\xi_b\xi_c,$$

$$H_4^{\text{int}}(\xi,z) = H_4(M\xi,z) = L_{ijkl}(z)M_{ia}M_{jb}M_{kc}M_{ld}\xi_a\xi_b\xi_c\xi_d.$$

В §3.2 рассматривается вычисление потенциалов поля фокусирующих элементов. Для магнитостатических фокусирующих элементов $\varphi_e^{\text{field}}(x,y;z) = 0$. Компоненты $\mathrm{A}^{\text{field}}(x,y;z)$ определяют в 3 этапа. 1) Решение уравнения Лапласа для магнитостатического потенциала с учетом граничных условий, определяемых симметрией поля. 2) Определение компонент вектора магнитной индукции. 3) Нахождение составляющих векторного потенциала.

В §3.3 рассматривается вычисление динамических переменных u и наблюдаемых U на основе автоморфизмов M′ в поперечном 4D фазовом пространстве. Используется картина Гейзенберга в статистической механике. Если явный вид M′ известен, вычисление изменения фазовых координат выполняется согласно

$$x(z)=\alpha(z)\,x^{in},\quad y(z)=\beta(z)\,y^{in},\quad p_x(z)=\gamma(z)\,p_x^{\,in},\quad p_y(z)=\delta(z)\,p_y^{\,in},$$

динамических переменных – согласно

$$\mathrm{M}':\quad u(\mathbf{r},\mathbf{p})=\sum\beta_{mn\mu\nu}x^m y^n p_x^{\,\mu} p_y^{\,\nu}\Rightarrow u(\mathbf{r},\mathbf{p};z)=\sum\hat{\beta}_{mn\mu\nu}(z)x^m y^n p_x^{\,\mu} p_y^{\,\nu},$$

усредненных по ансамблю параметров пучка – согласно

$$U(\mathbf{r}';z)=\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{p}\,u(\mathbf{r},\mathbf{p};z)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}(z))g(\mathbf{r},\mathbf{p}).$$

Вид $\alpha(z),\beta(z),\gamma(z),\delta(z)$, а также структуру изменяющихся вдоль ТК $g(\varsigma(z)),\ H(\varsigma,z)$ можно определить, если известен явный вид M′.

Отмечается, что для решения алгебраическими методами нестационарных уравнений самосогласованного поля использование картины Гейзенберга является предпочтительным по отношению к картине Шредингера, так как во втором случае аналитическое выражение изменяющегося гамильтониана для произвольного z заранее не известно.

В §3.4 рассматривается вычисление потенциалов поля пространственного заряда. Для известных плотности заряда $\rho(x,y;z)$ и плотности тока $\mathbf{j}(x,y;z)$ решение каждого из уравнений Пуассона

$$\Delta\varphi^{beam}(x,y;z)=-\frac{\rho(x,y;z)}{\varepsilon_0},\ \Delta\mathbf{A}^{beam}(x,y;z)=-\mu_0\mathbf{j}(x,y;z)$$

в произвольной точке сечения пучка (x_0,y_0) записывается через функцию Грина как решение двумерной внутренней краевой задачи Дирихле. Используются эллиптические координаты. Если известен явный вид M′, численное интегрирование выполняется в каждом i-ом узле (x_0^i,y_0^i) пространственной сетки, наложенной на поперечное сечение пучка.

Аналитическая аппроксимация $\varphi^{beam}(x,y;z)$, $\mathbf{A}^{beam}(x,y;z)$ полиномами 4-ой степени по x и y реализуется по методу наименьших квадратов. С учетом симметрии в эллиптической системе координат имеем

$$\varphi^{beam}(x,y;z)=C_{20}(z)x^2+C_{02}(z)y^2+C_{40}(z)x^4+C_{04}(z)y^4+C_{22}(z)x^2y^2,$$

$$\mathbf{A}^{beam}(x,y;z)=\mathbf{D}_{20}(z)x^2+\mathbf{D}_{02}(z)y^2+\mathbf{D}_{40}(z)x^4+\mathbf{D}_{04}(z)y^4+\mathbf{D}_{22}(z)x^2y^2.$$

Коэффициенты $C_{ij}(z)$ и $\mathbf{D}_{ij}(z)$ входят в число элементов матриц $S(z),T(z),L(z)$, вычисление которых выполняется по их известным начальным значениям $\check{S},\check{T},\check{L}$ с

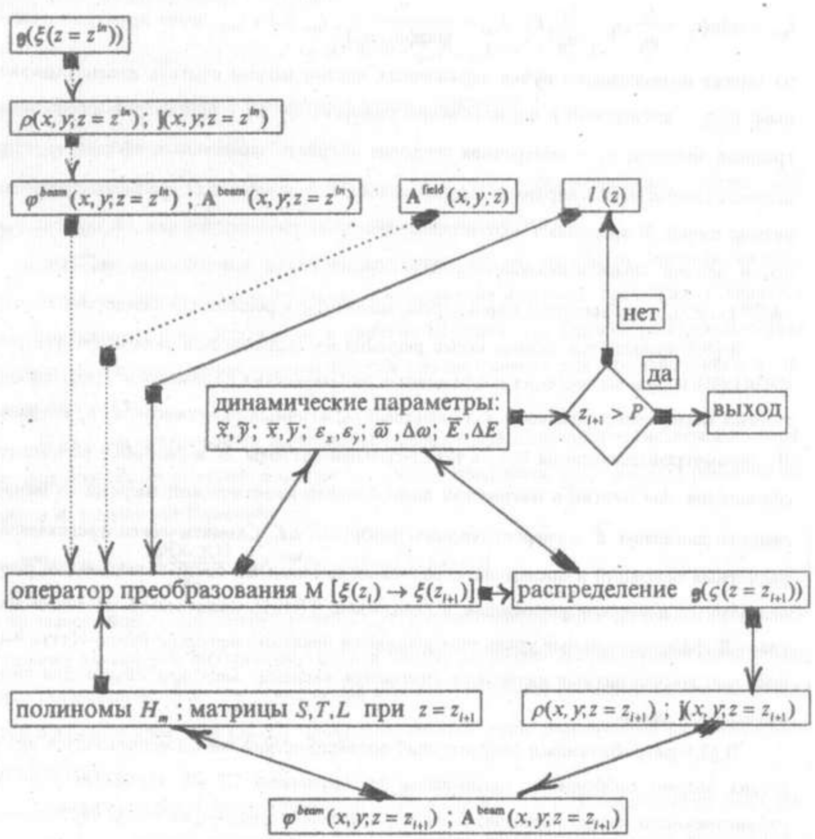
использованием M′. В свою очередь $S(z),T(z),L(z)$, а значит и $C_{ij}(z)$, $\mathbf{D}_{ij}(z)$ используются для вычисления факторов M′. В итоге получается система матричных нелинейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка, найти решение которой можно при условии, если каким-то образом определена зависимость $C_{ij}(z)$ и $\mathbf{D}_{ij}(z)$ от z.

С этой целью пучок рассматривается на основе модели квазистационарной плазмы. Показано, что в пределах l (длина элементарного участка ТК), где $l_{min}\sim\min(r_D\sim\frac{v_T}{\omega_L},r_L\sim\frac{v_T}{\omega_B},\tilde{r})$, $l_{max}\sim\frac{v_0}{\max(\omega_L,\omega_B)}$, $l_{min}\le l\le l_{max}$, поле пространственного заряда интенсивного пучка заряженных частиц можно считать квазистационарным; r_D,r_L – дебаевский и ларморовский радиусы, ω_L,ω_B – ленгмюровская и циклотронная частоты, v_T – поперечная тепловая скорость заряженных частиц, v_0 – продольная скорость их направленного движения, $\tilde{r}$ – поперечный среднеквадратичный размер пучка. В пределах l потенциалы пространственного заряда не зависят z явно, и задача самосогласованного вычисления M′ и определения $\varphi^{beam}(x,y;z)$ и $\mathbf{A}^{beam}(x,y;z)$, где z является параметром, может быть решена для каждого l.

В §3.5 приводится общая схема решения нестационарной задачи фокусировки СРЭП (ИРИП) и вычисления его основных динамических параметров: среднеквадратичных поперечных размеров $\tilde{x},\tilde{y}$, среднеквадратичных эмиттансов $\varepsilon_x,\varepsilon_y$ и яркости B, параметров центроиды $\bar{x},\bar{y}$, а также средней частоты $\overline{\omega}$ и разброса по частотам обращения $\Delta\omega$ частиц в магнитном поле, средней кинетической энергии их направленного движения $\overline{E}$ и энергетического разброса ΔE. Схематическое представление расчетных операций и последовательность их выполнения воспроизведены на рисунке. Данный алгоритм реализован в программе TRLIE, написанной на языке Фортран. Дифференциальные уравнения решаются численно методом Рунге–Кутта 4-ого порядка; многократные интегралы считаются численно методом Гаусса для гиперпрямоугольников.

В §3.6 разработанный операторный алгебраический метод используется для решения задачи свободного расширения дрейфующего СРЭП. Нелинейности пространственного заряда приводят к связи поперечных степеней свободы частиц пучка, благодаря чему появляется временная зависимость для функции распределения, и задача становится нестационарной. Для тестового примера выполнено сравнение с результатами алгебраического метода Драгта–Райна и результатами моделирования МКЧ (использовалось 50 000 крупных частиц). Последний рассматривается в качестве эталона. Вычисляются 4 параметра m_i' линейного фактора M'^{-1} и 5 параметров χ_k

его нелинейных факторов. В случае расчета m_i^j все три метода приводят к одинаковым результатам. В случае расчета χ_k выходные данные разработанного операторного алгебраического метода оказываются более близкими к результатам МКЧ, чем выходные данные метода Драгта–Райна.



Общая схема решения нестационарной задачи фокусировки СРЭП (ИРИП) и вычисления его основных динамических параметров.

В §3.7 разработанный операторный алгебраический метод используется для решения задачи транспортировки СРЭП соленоидальными линзами (канал МПФС) в условиях Мэрилэндского эксперимента (*Namkung W., Loschialpo P., Reiser M., Suter J., Lawson J.D. First Results Of The Maryland Electron Beam Transport Experiment. // IEEE. 1981. NS-28. P.2519-2521*). Вычисляется изменение $\bar{r}$ вдоль оси ТК. Полученные результаты в пределах точности согласуются с экспериментальными данными, отличаясь не более чем на 12%. Обсуждаются причины имеющегося расхождения.

В §3.8 разработанный операторный алгебраический метод используется для решения задачи транспортировки ИРИП квадрупольными линзами (канал ФОДО) в условиях Дармштадтского эксперимента (*Klabunde J., Reiser M., Schonlein A., Spadke P., Struckmeier J. Studies Of Heavy Ion Beam Transport In A Magnetic Quadrupole Channel. // IEEE. 1983. NS-30. P.2543-2545*). Вычисляется показатель роста поперечного эмиттанса ИРИП $\varepsilon_{out} / \varepsilon_{in}$ как функция характеристического показателя фокусирующего канала σ_0. Полученные результаты в пределах точности согласуются с экспериментальными данными, отличаясь не более чем на 11%. Обсуждаются причины имеющегося расхождения.

В §3.9 показано, что огибающая СРЭП в продольном магнитном поле представляет собой поверхностную волну в замагниченном плазменном цилиндре (*Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М., Высшая школа, 1988.- 424 с.*). Для нее имеет место дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = k^2 \frac{\omega_L^2 r_0^2}{2} \ln \frac{1}{k r_0}, \quad \omega = \gamma w;$$

где k и w – волновое число и частота колебаний огибающей СРЭП, γ – лоренц-фактор, ω – частота поверхностных волн, r_0 – параметр неоднородности. Приведенное соотношение справедливо при условии, что частота ω не превышает плазменную частоту ω_L.

В главе 4 "Вычисление динамических параметров сильноточного релятивистского электронного пучка, фокусируемого магнитными мультиполями (метод моментов)" для решения нестационарной задачи транспортировки СРЭП квадрупольными и октупольными магнитостатическими линзами используются моменты функции распределения. Пучок считается непрерывным. Эффекты столкновения частиц полагаются несущественными. Предполагается, что распределение заряда в эллиптическом сечении пучка при его транспортировке остается гауссовским по форме.

В §4.1 впервые получена замкнутая система уравнений моментов для двумерного движения гауссовского СРЭП, фокусируемого магнитными мультиполями, при наличии малых кубических нелинейностей внешних полей и пространственного заряда. Компоненты силы, действующей на произвольную частицу СРЭП со стороны внешнего поля и пространственного заряда, имеют вид:

$$F_x^{field} = -ev_0[g^{qu}(z)x + g^{oc}(z)(3y^2x - x^3)], F_y^{field} = +ev_0[g^{qu}(z)y - g^{oc}(z)(3x^2y - y^3)],$$

$$F_x^{beam} = \frac{e}{\gamma^2}(C_1(z)x + C_2(z)x^3 + C_3(z)y^2x), F_y^{beam} = \frac{e}{\gamma^2}(C_4(z)x + C_5(z)x^3 + C_6(z)x^2y),$$

где $g^{qu}(z), g^{oc}(z)$ – соответственно градиенты квадруполя и октуполя, $C_i(z)$ – коэффициенты полиномиального представления $\varphi^{beam}(x, y, z)$.

Замкнуть цепочку уравнений моментов с точностью до квадратов нелинейных членов оказалось возможным благодаря квадрупольной и октупольной симметрии фокусирующих полей и использованию свойств двумерного гауссовского распределения.

Система 6 дифференциальных уравнений 2-ого порядка для вторых и первых моментов $\tilde{x} = \sqrt{\overline{x^2}}$, $\tilde{y} = \sqrt{\overline{y^2}}$, $\rho_x = \overline{\dot{x}^2}$, $\rho_y = \overline{\dot{y}^2}$ и $\overline{x}, \overline{y}$ содержит моменты третьего $\overline{xy^2}, \overline{yx^2}, \overline{x^3}, \overline{y^3}$ и четвертого $\overline{x^2y^2}, \overline{x^2y\dot{y}}, \overline{y^2x\dot{x}}$ порядков. Черта обозначает усреднение физической величины с помощью функции распределения. Так как нелинейности считаются малыми, система 9 дифференциальных уравнений 1-ого порядка для четвертых моментов $\overline{x^2y\dot{y}}$, $\overline{y^2x\dot{x}}$, $\overline{x^2\dot{y}^2}$, $\overline{\dot{x}^2y^2}$, $\overline{\dot{x}^2y\dot{y}}$, $\overline{\dot{y}^2x\dot{x}}$, $\overline{x^2y^2}$, $\overline{x\dot{x}y\dot{y}}$, $\overline{\dot{x}^2\dot{y}^2}$ оказывается замкнутой с точностью до членов второго порядка малости.

Для многомерного нормального распределения центральный момент любого нечетного порядка равен нулю, а центральный момент любого четного порядка выражается через соответствующие моменты второго порядка, т.е. через дисперсии случайных величин и коэффициенты корреляций между ними. Поэтому неизвестные моменты третьего порядка можно выразить через $\overline{x}, \tilde{y}$; $\overline{x}, \overline{y}$; $\overline{x^2y^2}$.

В §4.2 вычисляются $\varphi^{beam}(x, y, z)$, $A^{beam}(x, y, z)$. Показано, что так как кинетическая энергия и эффективный потенциал для произвольной частицы фокусируемого пучка представляют собой полиномиальные формы, а рассматриваемые нелинейности полей малы, профиль пучка можно считать гауссовским вдоль всего ТК. Пространственный масштаб изменения по z параметров двумерного нормального распределения $l \sim r_D$.

Для гауссовского $\rho(x, y, z)$ в пределах l получены точные аналитические формулы расчета $\varphi^{beam}(x, y, z)$ в некоторой точке сечения пучка (x_0, y_0), содержащие интегральную экспоненту. Полиномиальная аппроксимация $\varphi^{beam}(x, y, z)$ для данного l

выполняется по методу наименьших квадратов. $A^{beam}(x, y, z)$ вычисляется в квазистатическом приближении: $A_x^{beam} = A_y^{beam} = 0, A_z^{beam} = \frac{v_0}{c^2}\varphi^{beam}$.

В §4.3 проводится решение системы уравнений моментов. Так как $g^{qu}(z), g^{oc}(z)$ и $C_i(z)$ – кусочно-постоянные функции z, в пределах l система становится автономной. Четвертые моменты определяются аналитически через собственные значения и собственные вектора подсистемы из 9 уравнений. Для определения $\tilde{x}, \tilde{y}$ и $\overline{x}, \overline{y}$ численно интегрируется подсистема из 6 уравнений. Шаг интегрирования $\sim l$.

В §4.4 полученная система уравнений моментов использовалась для решения нестационарной задачи транспортировки гауссовского СРЭП со смещенной центроидой триплетом квадруполей с краевыми полями (октупольные составляющие). Приводятся графики изменения $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и $\overline{x}, \overline{y}$. Выполнено сравнение результатов и данных, полученных с использованием операторного алгебраического метода.

В главе 5 "Оптимизация параметров фокусирующего поля для получения СРЭП с минимально возможным поперечным эмиттансом (оптимальное управление)" для системы уравнений моментов сформулирована и решена нелинейная терминальная задача Майера оптимального управления.

В §5.1 для уменьшения возрастания поперечного среднеквадратичного эмиттанса СРЭП предлагается одновременно влиять на изменение нелинейностей пространственного заряда соответствующим выбором конфигурации линейной составляющей фокусирующего поля и по возможности компенсировать их нелинейностями этого же поля.

В §5.2 сформулирована задача Майера оптимального управления: *определить параметры квадруполей $g(z)$ и $g''(z)$ (градиенты линз, вторые производные градиентов) как функции продольной координаты z, которые обеспечивают получение на выходе канала транспортировки пучка с минимально возможным поперечным среднеквадратичным эмиттансом ε.*

Решение получено на основе принципа максимума Понтрягина в рамках итеративного метода Брайсона–Шатровского (*Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М., Наука, 1975.- 528 с.*) для нелинейных терминальных задач. Снятие фазовых ограничений на $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и ρ_x, ρ_y осуществляется методом штрафных функций. Интегрирование системы дифференциальных уравнений на каждой итерации выполняется численно методом Рунге–Кутта 4-ого порядка. Решение задачи оптимального управления параметрами фокусирующего поля реализовано в программе SREP, написанной на языке Паскаль.

Впервые задача оптимального управления для минимизации эмиттанса СРЭП решена с учетом кубических нелинейностей фокусирующих полей и пространственного заряда.

В §5.3 в качестве примера рассматривается транспортировка СРЭП квадрупольными мультиплетами. Десять квадрупольных линз (с краевыми полями) одинаковой длины расположены друг за другом без использования дрейфовых промежутков. Требуется найти оптимальные кусочно-постоянные функции $g(z)$ и $g''(z)$.

Впервые показано, что для гауссовского СРЭП с нелинейным полем пространственного заряда рост его поперечного среднеквадратичного эмиттанса возможно частично скомпенсировать соответствующим выбором краевых полей набора магнитных квадрупольных линз с одинаковыми геометрическими параметрами, но разными значениями градиента.

Приводятся графики задаваемых исходных и полученных оптимальных значений $g(z), g''(z)$; ε, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$. Отмечается, что в результате оптимизации оказывается возможным уменьшить рост поперечного эмиттанса СРЭП без увеличения $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$.

Корректность решения сформулированной выше задачи оптимального управления подтверждает следующий факт. Когда для рассматриваемого примера в качестве задаваемого исходного управления было выбрано оптимальное, программой SREP выполнена единственная глобальная итерация, и в качестве оптимального управления выдается задаваемое начальное.

В **приложении 1** "Свойства операторов Ли и преобразований Ли" приводятся определения операторов Ли и преобразований Ли, их основные свойства, используемые в алгебре Ли обозначения.

В **приложении 2** "Постановка задачи оптимального управления" приводятся основные понятия и термины, используемые в теории оптимального управления, постановка и формулировка задач оптимизации разного типа, содержание принципа максимума.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан операторный алгебраический метод решения нестационарных уравнений самосогласованного поля и расчета динамических параметров СРЭП (ИРИП) в магнитофокусирующих полях. Учитываются нелинейности пространственного заряда и фокусирующих полей. Используется картина Гейзенберга в статистической механике. Структура оператора преобразования определяется согласно теореме факторизации Драгта–Финна. Вычисление его факторов выполняется в рамках теоретико-группового анализа симплектического многообразия с использованием аппарата алгебры Ли.

2. В пределах l (длина элементарного участка ТК), $l_{\min} \le l \le l_{\max}$, где $l_{\min} \sim \min(r_D \sim \frac{v_T}{\omega_L}, r_L \sim \frac{v_T}{\omega_B}, \widetilde{r})$, $l_{\max} \sim \frac{v_0}{\max(\omega_L, \omega_B)}$, поле пространственного заряда СРЭП (ИРИП) можно считать квазистационарным.
3. Разработан алгоритм решения нестационарных задач фокусировки СРЭП (ИРИП) безотносительно к виду начального распределения в магнитных полях произвольной конфигурации.
4. Разработанный операторный алгебраический метод применен для решения нестационарных задач транспортировки СРЭП (ИРИП) в магнитостатических каналах. Вычислены динамические параметры интенсивных (сильноточных) пучков заряженных частиц в каналах типа МПФС и ФОДО, отмечено удовлетворительное соответствие полученных результатов и экспериментальных данных. Результаты решения задачи свободного расширения дрейфующего СРЭП хорошо согласуются с выходными данными апробированных компьютерных кодов, использующих МКЧ.
5. Впервые получено дисперсионное соотношение для колебаний огибающей СРЭП в продольном магнитном поле.
6. Впервые получена замкнутая система уравнений моментов для двумерного движения гауссовского СРЭП, фокусируемого магнитными мультиполями, при наличии малых кубических нелинейностей внешних полей и пространственного заряда. Полученная система уравнений моментов использовалась для численного решения нестационарной задачи транспортировки гауссовского СРЭП квадрупольными линзами с краевыми полями. Построены графики изменения его средних и среднеквадратичных размеров. Выполнено сравнение результатов с данными, посчитанными другим методом.
7. Сформулирована и решена нелинейная терминальная задача Майера оптимального управления параметрами магнитофокусирующей системы с квадрупольной и октупольной симметрией, чтобы получить на выходе канала транспортировки гауссовский СРЭП с минимально возможным поперечным среднеквадратичным эмиттансом. Решение получено на основе принципа максимума Понтрягина в рамках итеративного метода Брайсона–Шатровского для нелинейных терминальных задач. Впервые задача оптимального управления для минимизации эмиттанса СРЭП решена с учетом кубических нелинейностей фокусирующих полей и поля пространственного заряда.

8. Впервые показано, что для гауссовского СРЭП с нелинейным полем пространственного заряда рост его поперечного среднеквадратичного эмиттанса возможно частично скомпенсировать соответствующим выбором краевых полей набора магнитных квадрупольных линз с одинаковыми геометрическими параметрами, но разными значениями градиента.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Бородич А.И., Хрущинский А.А. Самосогласованный метод вычисления собственного поля сильноточного электронного пучка при расчете его транспортировки с использованием аппарата алгебры Ли. // Весцi Акадэмii навук Беларусi. Серия физ.-мат. наук. 1994. №4. С.65-70.

2. Бородич А.И. Описание динамики транспортируемого электронного пучка на базе модели квазиравновесной плазмы с использованием аппарата алгебры Ли. // Труды международной конференции "Физика и техника плазмы". - Минск, 1994. - С.202-204.

3. Borodich A.I. The consideration of a bright relative beam dynamics in the magnetic focusing field. - Preprint ICTP IC/94/209. - Trieste, 1994. - 7 p.

4. Бородич А.И., Столярский В.И., Хрущинский А.А. Применение модели квазиравновесной плазмы и аппарата алгебры Ли для расчета характеристик транспортируемого СРЭП. // Инженерно - физический журнал. 1996. Т.69. №1. С.36-41.

5. A.I.Borodich, V.I.Stolyarsky, A.A.Khrutchinsky. The Description of High Current Beam Dynamics Using the Lie Algebraic Methods. // Proceedings Of The 1995 IEEE PAC And International Conference On High-Energy Accelerators. N.-Y., 1995. - P.3232-3234.

6. Бородич А.И. Вычисление обратного оператора преобразования фазовых координат частиц гамильтоновой системы. // Весцi Акадэмii навук Беларусi. Серия физ.-мат. наук. 1997. № 3. С.65-70.

7. Транспортировка сильноточного релятивистского пучка заряженных частиц в магнитных полях: Отчет о НИР (заключ.) / Фонд фундаментальных исследований Республики Беларусь; Руководитель работы А.И.Бородич; Договор № МП94-41. - Минск, 1996. - 50 с.

8. Бородич А.И., Волков И.А. Транспортировка сильноточного релятивистского электронного пучка магнитными мультиполями. // Инженерно - физический журнал. 1997. Т.70. № 5. С.776-782.

9. Бородич А.И., Волков И.А. Оптимальное управление параметрами фокусирующего поля для получения пучка с минимальным эмиттансом. // Инженерно - физический журнал. 1997. Т.70. № 6. (в печати)

РЭЗЮМЭ

Барoдзiч Андрэй Iгаравiч

АЛГЕБРЫ ЛI I МЕТАД МАМЕНТАЎ У НЕСТАЦЫЯНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ФАКУСIРОЎКI IНТЭНСIЎНЫХ РЭЛIТЫВIТСКIХ ПУЧКОЎ ЗАРАДЖАНЫХ ЧАСЦIЦ

Ключавыя словы: iнтэнсiўны рэлiтывiтскi пучок зараджаных часцiц, нестацыянарная дынамiка, алгебры Лi, карцiна Гэйзенберга, метад маментаў, аптымальнае кiраванне.

Разработана агульная разлiкова-аналiтычная схема аналiзу нестацыянарнай дынамiкi iнтэнсiўных рэлiтывiтскiх пучкоў зараджаных часцiц у палях магнiтафакусiруючых элементаў з улiкам нелiнейнасцей знешнiх палеў i прасторавага зараду. Выкарыстоўваецца апарат алгебр Лi ў рамках тэарэтыка-групавога аналiзу гамiльтонавых сiстэм на аснове карцiны Гэйзенберга ў статыстычнай механiцы. Для гаўсаўскага сiльнаточнага рэлiтывiтскага электроннага пучка ў магнiтных палях з квадрупольнай i актупольнай сiметрыяй у рамках метада маментаў атрыманы ураўненнi руху для яго сярэднiх i сярэднеквадратычных памераў у выпадку малых нелiнейнасцей палеў. Для дадзенай фiзiчнай сiстэмы сфармулявана i вырашана нелiнейная тэрмiнальная задача Майера аптымальнага кiравання параметрамi набора квадрупольных лiнз з краявымi палямi для атрымання на выхадзе канала транспартыроўцы пучка з мiнiмальна магчымым папярэчным эмiтансам.

РЕЗЮМЕ

Бородич Андрей Игоревич

АЛГЕБРЫ ЛИ И МЕТОД МОМЕНТОВ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ФОКУСИРОВКИ ИНТЕНСИВНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Ключевые слова: интенсивный релятивистский пучок заряженных частиц, нестационарная динамика, алгебры Ли, картина Гейзенберга, метод моментов, оптимальное управление.

Разработана общая расчетно-аналитическая схема анализа нестационарной динамики интенсивных релятивистских пучков заряженных частиц в полях магнитофокусирующих элементов с учетом нелинейностей внешних полей и пространственного заряда. Используется аппарат алгебр Ли в рамках теоретико-группового анализа гамильтоновых систем на основе картины Гейзенберга в статистической механике. Для гауссовского сильноточного релятивистского электронного пучка в магнитных полях с квадрупольной и октупольной симметрией в рамках метода моментов получены динамические уравнения для его средних и среднеквадратичных размеров в случае малых нелинейностей полей. Для данной физической системы сформулирована и решена нелинейная терминальная задача Майера оптимального управления параметрами набора квадрупольных линз с краевыми полями для получения на выходе канала транспортировки пучка с минимально возможным поперечным эмиттансом.

ABSTRACT

Borodich Andrei Igorevich

LIE ALGEBRAIC TECHNIQUES AND MOMENTS OF DISTRIBUTION IN NONSTATIONARY PROBLEMS OF BRIGHT RELATIVISTIC BEAMS FOCUSING

Key Words: bright relativistic beams focusing, nonstationary dynamics, Lie algebraic techniques, Heisenberg picture, moments of distribution, optimal control.

The general analytical and numerical scheme to analyse nonstationary dynamics of bright relativistic beams in magnetic focusing fields was worked out. Nonlinearities of external fields and space charge were taken into account. Lie algebraic techniques in frame of group-theoretical analysis of Hamilton systems was used on the base of Heisenberg picture in statystical mechanics. For Gaussian bright electron beam in magnetic fields with quadrupole and octupole symmetries the dynamical equations for average and root-mean-square values at presence of small nonlinearities were obtained having used moments of distribution. Nonlinear terminal Mayer problem of optimal control by the parameters of qudrupoles with fringe fields was formulated and solved to receive the beam with minimal transverse emittance at the transport line end.

Подписано к печати 26. 06. 1997 г. Формат 60 х 84 1 / 16.
Бумага № 1. Объем 1,0 п.л. Заказ № 250. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ротапринте Белгосуниверситета
220050, г. Минск, ул. Бобруйская, 7